3. Quelques notions de théorie de groupe

3.1 Rappel sur les groupes libres et présentations

<u>Def</u> : Pour un ensemble I, le <u>groupe libre sur I</u> est l'ensemble des mots $x_{\alpha_1}^{n_1} x_{\alpha_2}^{n_2} \cdots x_{\alpha_k}^{n_k}$ où $n_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \in I$ et x_{α_i} est une "variable formelle" représentant $\alpha_i \in I$.
La composition est la concaténation des mots.

<u>Notation</u> : $F(I) = \{ x_{\alpha_1}^{n_1} \cdots x_{\alpha_k}^{n_k} \mid k \geq 0, n_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \in I \}$

On écrit 1 pour l'élém. neutre = mot vide

On a $x_\alpha^0 = 1$ et $x_\alpha^n \cdot x_\alpha^m = x_\alpha^{n+m}$ $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$. En part $x_\alpha^{-1} \cdot x_\alpha = 1$.

<u>Rmk</u> : On a un foncteur F : Ensemble $\to$ Groupes
$I \mapsto F(I)$
qui est adjoint à gauche à O : Groupes $\to$ Ensemble
$(G, \cdot) \mapsto G$

On peut vérifier que $\mathrm{Hom}_{grp}(F(I), G) = \mathrm{Hom}_{Ens}(I, G)$

<u>Exple</u> : $\cdot$ $I = \emptyset \rightsquigarrow F(I) = \{1\}$.

- $I = \{pt\} \rightsquigarrow F(I) = \mathbb{Z}$
- $I = \{a, b\} \rightsquigarrow F(a,b) = \{ a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \cdots a^{n_k} b^{m_k} \mid k \geq 1, n_i, m_i \in \mathbb{Z} \}$.

par ex. $a^{-1} b^2 \cdot b^{-1} a^3 = a^{-1} b a^3$

Soit maintenant G un groupe engendré par $\{ g_\alpha \in G \mid \alpha \in I \} \subset G$.

Alors on a un homom. surj $\varphi : F(I) \to G$. Un choix de générateurs
$\alpha \mapsto g_\alpha$

de $\mathrm{Ker}(\varphi) = \langle r_\beta \mid \beta \in J \rangle$ en tant que sous-groupe normal de $\mathrm{Ker}(\varphi) = \langle r_\beta \mid \beta \in J \rangle$ autant que sous-groupe normal nous donne une <u>présentation de G par générateurs et relateurs</u> (car $G \cong F(I)/_{\mathrm{Ker}(\varphi)}$)

<u>Notation</u>: $G \cong \langle x_\alpha, \alpha \in I \mid r_\beta, \beta \in J \rangle$

<u>Rmk</u>: · Comme $\mathrm{Ker}(\varphi) \trianglelefteq F(I)$, les r_β sont des mots en $x_\alpha, \alpha \in I$.

· La présentation d'un groupe est loin d'être unique!

<u>Exple</u>: · $F(\emptyset) \cong \langle x \mid x^2, x^3 \rangle$ car $x^2 = 1$ et $x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$.

· $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle x \mid x^n \rangle$

· On a $F(a,b) \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Le noyau est engendré par

$a \mapsto (1,0)$

$b \mapsto (0,1)$

$xyx^{-1}y^{-1}$ autant que sous-grp normale, mais pas autant de sous-groupe, car le sous-group eng. par n'importe quel élém $z \in F(a,b)$ est $\langle z \rangle = \{ z^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z}$.

<u>3.2 Produit libre</u>

<u>Def</u>: Soient $G \cong \langle x_\alpha, \alpha \in I \mid r_\beta, \beta \in J \rangle$ et $H \cong \langle y_\gamma, \gamma \in K \mid s_\delta, \delta \in L \rangle$ deux groupes. Le <u>produit libre</u> $G * H$ est le groupe $\langle x_\alpha, y_\gamma ; \alpha \in I, \gamma \in K \mid r_\beta, s_\delta ; \beta \in J, \delta \in L \rangle$.

<u>Rmk</u>: Autrement dit les élém de $G * H$ sont des mots

$$g_1 h_1 g_2 h_2 \cdots g_k h_k \quad \text{avec } g_i \in G, h_i \in H \text{ et } k \geq 0$$

$g_1 h_1 g_2 h_2 \cdots g_k h_k$ avec $g_i \in G$, $h_i \in H$ et $k \geq 0$

sans aucune relation entre les g_i et les h_i.

Exple: $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F(a,b)$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(I) \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "x_\alpha \mapsto x_\alpha"] & F(I \cup K) \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "\substack{x_\alpha \mapsto x_\alpha \\ x_\gamma \mapsto 1}"] & F(I) \arrow[d] \\
G \arrow[r, "i"] & G * H \arrow[r, "p"] & G
\end{tikzcd}$$

Comme $p' \circ i' = \mathrm{Id}_{F(I)}$ on a aussi $p \circ i = \mathrm{id}_G \Rightarrow i$ est injective.

On a pareil $j : H \hookrightarrow G * H$ avec

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[d, "j"] \arrow[rdd, bend left, "\psi"] & \\
G \arrow[r, "i"] \arrow[rrd, bend right, "\varphi"'] & G * H \arrow[rd, dashed, "\omega"] & \\
 & & M
\end{tikzcd}$$

Prop 3.1: (Propriété univ. du produit libre)

Pour toute paire d'homom. $\varphi : G \to M$, $\psi : H \to M$

$\exists! \, \omega : G * H \to M$ t.q. $\omega \circ i = \varphi$ et $\omega \circ j = \psi$.

En part. $G * H$ est indépendant des présentations de G et H.

preuve: On doit avoir $\omega(x_\alpha) = \varphi(x_\alpha)$ $\forall \alpha \in I$, $\omega(y_\gamma) = \psi(y_\gamma)$ $\forall \gamma \in K$

Comme x_α et y_γ engendrent $G * H$ on voit que ω est unique

En plus on a un homom. $F(I \cup J) \xrightarrow{\tilde{\omega}} M$

$$x_\alpha \mapsto \varphi(x_\alpha)$$
$$y_\gamma \mapsto \psi(y_\gamma)$$

Pour chaque relation r_β on a $\tilde{\omega}(r_\beta) = \varphi(r_\beta) = 1$ et pareil $\tilde{\omega}(s_\delta) = 1 \Rightarrow \tilde{\omega}$ se factorize par $\omega : G * H \to M$ □